© Г.Г.Кулиев, Н.М.Ширинов, 2006

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ НАПРЯЖЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Г.Г.Кулиев, Н.М.Ширинов

Институт геологии НАН Азербайджана
AZ 1143, Баку, просп. Г.Джавида, 29А

На основе неклассической линеаризованной теории с использованием упругого потенциала типа Мурнагана в рамках различных вариантов теории начальных деформаций и представлений формул гармонических колебаний получены расчетные формулы для модулей упругости третьего порядка нелинейных изотропных сред. Рассмотрен случай произвольных однородных напряженных состояний. Для ряда магматических пород Малого Кавказа приведены конкретные численные результаты.

Различные аспекты определения линейных и нелинейных модулей упругости деформированных сред на основе неклассической линеаризованной теории (НЛТ) исследованы в (Гузь, 1986; Кулиев, 2000; Кулиев и Джаббаров, 1998; Кулиев и Ширинов, 2005; Ширинов, 2005; Kuliev, 1998a, 1998b; Kuliyev, Djavanshir, 2000). К вопросам экспериментального определения модулей упругости третьего порядка горных пород посвящены работы (Александров и др., 2001; Бакулин и Протосения, 1982; Yin and Rasolofosaon, 1994 и др.).

В НЛТ различают (Гузь, 1986) три варианта теории начальных деформаций: 1. В первом варианте теории малых начальных деформаций принято считать, что сдвиги и удлинения являются малыми по сравнению с единицей; 2. Во втором варианте теории малых начальных деформаций дополнительно к первому варианту учитывается также то, что компоненты тензоров напряжений и деформаций подчиняются закону Гука; 3. В теории больших (конечных) начальных деформаций указанные в предыдущих вариантах ограничения не соблюдаются. В НЛТ также различаются два случая представления плоской гармонической волны. В первом – изменения расстояний между материальными частицами за счет начальной деформации не учитываются, и скорость распространения волны называется «естественной» или «натуральной» скоростью (Thurston and Brugger, 1964). Во втором – изменения расстояний между материальными частицами за счет начальной деформации учитываются, и скорость распространения волны называется «истинной» скоростью.

Исходя из результатов НЛТ, полученных в (Гузь, 1986), для определения третьего порядка модулей упругости нелинейно деформированных изотропных сред (пород) при произвольно напряженном состоянии выводим следующие расчетные формулы:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{a_3}\left[\rho C_{LX_1} - a_1 - (2a_2 + a_3)b - a_2 c\right] \\
b &= -\frac{3K_0}{\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0} \times \\
&\quad \times \left[\mu + \sigma_{11}^0 - \frac{4\mu\rho\left(c_2 C_{SX_2}^2 - b_2 C_{SX_3}^2\right)}{\sigma_{33}}\right] \\
c &= \frac{1}{b_2}\left(\rho C_{SX_2}^2 - \mu - \sigma_{11}^0 - 4\mu b_2 - b_3 b\right),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где ρ – плотность среды; $K_0 = \lambda + \frac{2}{3}\mu$; $\sigma_{ii}^0 (i = 1,2,3)$ – нормальные компоненты тензора начальных напряжений; C_{LX_1} – «истинная» скорость продольных волн вдоль оси ox_1; C_{SX_2}, C_{SX_3} – «истинные» скорости поперечных волн соответственно вдоль осей ox_2 и ox_3. В случае использования «натуральных» скоростей формулы (1) формально сохраняют внешний вид, но в них необходимо сделать замену: $C_{LX_1} \to V_{LX_1}$; $C_{SX_1} \to V_{SX_1}$; $C_{SX_3} \to V_{SX_3}$. Кро-

ме того, необходимо иметь в виду, что в этом случае отличаются также численные значения второго порядка модулей упругости μ и λ. Здесь приняты также следующие обозначения:

I. Случай использования «истинных» скоростей:

а) В теории больших и первом варианте теории малых начальных деформаций:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0 + 2(\lambda + 2\mu)a_2;\\
&a_2 = \frac{1}{3K_0\mu}\left[2(\lambda+\mu)\sigma_{11}^0 - \lambda\left(\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right)\right]\\
&a_3 = \frac{2}{3K_0}\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right);\\
&b_1 = \mu + \sigma_{11}^0 + 4\mu b_2\\
&b_2 = \frac{1}{12K_0\mu}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0\right) - 2\lambda\sigma_{33}^0\right];\\
&b_3 = \frac{1}{2}a_3;\ c_1 = \mu + \sigma_{11}^0 + 4\mu c_2\\
&c_2 = \frac{1}{12K_0\mu}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{33}^0\right) - 2\lambda\sigma_{22}^0\right];\\
&c_3 = b_3
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

b) Во втором варианте теории малых начальных деформаций:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0 + a_2(\lambda + 2\mu);\\
&a_2 = \frac{1}{3K_0\mu}\left[2(\lambda+\mu)\sigma_{11}^0 - \lambda\left(\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right)\right]\\
&a_3 = \frac{2}{3K_0}\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right);\ b_1 = \mu + \sigma_{11}^0;\\
&b_3 = \frac{1}{2}a_3\\
&b_2 = \frac{1}{12\mu K_0}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0\right) - 2\lambda\sigma_{33}^0\right];\\
&c_3 = b_3\\
&c_1 = \mu + \sigma_{11}^0 + \frac{1}{3K_0}\left[2(\lambda+\mu)\sigma_{11}^0 - \lambda\left(\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right)\right];\\
&c_2 = \frac{1}{12\mu K_0}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{33}^0\right) - 2\lambda\sigma_{22}^0\right].
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

II. Случай использования «натуральных» скоростей:

а) В теории больших и первом варианте теории малых начальных деформаций:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0 + (\lambda + 2\mu)a_2;\\
&a_2 = \frac{1}{3K_0\mu}\left[2(\lambda+\mu)\sigma_{11}^0 - \lambda\left(\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right)\right]\\
&a_3 = \frac{2}{3K_0}\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right);\\
&b_1 = \mu + \frac{1}{3K_0}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0\right) - 2\lambda\sigma_{33}^0\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\lambda a_3\\
&b_2 = \frac{1}{12\mu K_0}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0\right) - 2\lambda\sigma_{33}^0\right];\\
&b_3 = \frac{1}{2}a_3;\ c_3 = b_3\\
&c_1 = \mu + \frac{1}{2}\lambda a_3 + 4c_2;\\
&c_2 = \frac{1}{12K_0}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{33}^0\right) - 2\lambda\sigma_{22}^0\right]
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

б) Во втором варианте теории малых начальных деформаций:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0;\\
&a_2 = \frac{1}{3K_0\mu}\left[2(\lambda+\mu)\sigma_{11}^0 - \lambda\left(\sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right)\right];\\
&a_3 = \frac{2}{3K_0}\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0\right);\\
&b_1 = \mu + \sigma_{11}^0;\\
&b_2 = \frac{1}{12\mu K_0}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{33}^0\right) - 2\lambda\sigma_{33}^0\right];\\
&b_3 = \frac{1}{2}a_3;\\
&c_1 = b_1;\\
&c_2 = \frac{1}{12\mu K_0}\left[(\lambda+2\mu)\left(\sigma_{11}^0 + \sigma_{33}^0\right) - 2\lambda\sigma_{22}^0\right];\\
&c_3 = b_3.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Формулы (1) при $\sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 \neq \sigma_{11}^0$ в случае распространения волн в направлении оси ox_1 используются со следующими изменениями :

$$b_1 = c_1 = \mu + \sigma_{11}^0 + 4\mu b_2 ;$$

$$b_2 = c_2 = \frac{1}{12K_0\mu}\left[(\lambda+2\mu)(\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0) - 2\lambda\sigma_{22}^0\right]$$

$$b_3 = c_3 = \frac{1}{3K_0}\left(\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0+\sigma_{33}^0\right);\ a_3 = 2b_3; \quad (6)$$

$$a_2 = \frac{1}{3K_0\mu}\left[2(\lambda+\mu)\sigma_{11}^0 - 2\lambda\sigma_{22}^0\right];$$

$$a_1 = \lambda + 2\mu + \sigma_{11}^0 + (\lambda+2\mu)f ,$$

где для I а – $f = 2a_2$; I б – $f = a_2$; II а – $f = a_2$; II б – $f = 0$.

Естественно, что для различных вариантов теории начальных деформаций используются соответствующие величины μ и λ.

В случае всестороннего сжатия, т.е. при $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = -P$, формулы (1) значительно упрощаются и приобретают следующий вид:

$$n_1 = c + 3b = \frac{1}{Pa_3}\left(\mu - \rho C_S^2\right) - \frac{a_2}{a_3} ; \quad (7)$$

$$n_2 = c + 3a + 5b = \frac{1}{Pa_1}\left(\lambda + 2\mu - \rho C_L^2\right) - \frac{a_0}{a_1},$$

где C_L, C_S – «истинные» скорости продольных и поперечных волн. Здесь приняты такие обозначения:

1. Случай «истинных» скоростей:

а) $a_0 = 1 + \frac{4}{3K_0}(\lambda+2\mu);\ a_1 = \frac{2}{3K_0}$;

$$a_2 = 1 + \frac{4\mu}{3K_0};\ a_3 = \frac{1}{2}a_1 \quad (8)$$

б) $a_0 = 1 + \frac{2(\lambda+2\mu}{3K_0};\ a_1 = \frac{2}{3K_0}$;

$$a_2 = 1 + \frac{2\mu}{3K_0};\ a_3 = \frac{1}{2}a_1 . \quad (9)$$

1.Случай «натуральных» скоростей:

а) В этом случае все формулы формально совпадают с формулами (9);

б) $a_0 = 1;\ a_1 = \frac{2}{3K_0}$;

$$a_2 = 1 + \frac{2\mu}{3K_0};\ a_3 = \frac{1}{2}a_1 \quad (10)$$

В случае всестороннего сжатия в формулах для определения скоростей необходимо знать величины n_1 и n_2, поэтому формулы (7)-(10) достаточны для расчета этих комбинированных модулей упругости третьего порядка в пределах различных вариантов теории начальных деформаций и представлений формы гармонических колебаний.

В (Сафаров, 2003) приведены результаты экспериментального исследования по определению скоростей распространения упругих продольных и поперечных волн в некоторых магматических породах Малого Кавказа в зависимости от роста давления. Применяя формулы (7)-(10) и используя эти экспериментальные данные, вычислены n_1 и n_2. Результаты вычислений помещены (в ГПа) в приведенных ниже таблицах 1, 2, 3.

Полученные численные результаты показывают, что для рассмотренных пород в рамках всех вариантов теории начальных деформаций и формы упругих колебаний характер влияния роста давлений на величины комбинированных модулей упругости третьего порядка количественно и качественно одинаков. С ростом давления величины этих параметров значительно уменьшаются. Изменение давлений от 0,001 ГПа до 1,5 ГПа приводит к понижению значений этих модулей почти на три порядка. Поэтому при использовании в конкретных расчетах данных о нелинейных модулях упругости третьего порядка необходимо указать также соответствующие уровни давления.

Таблица 1

Численные значения комбинированных модулей упругости третьего порядка n_1 и n_2 в рамках теорий больших и первого варианта теории малых начальных деформаций при использовании «истинных» скоростей

Р. ГПа / Среда		0,001	0,1	0,5	1,0	1,5
Серпентинит-11	n_1	$-373.92\cdot10^3$	-3983.3	-993.86	-620.86	-495.62
	n_2	$-362.9\cdot10^3$	-3857.37	-956.01	-593.34	-472.45
Андезит-12	n_1	$-314.52\cdot10^3$	-3382.8	-868.56	-554.28	-449.52
	n_2	$-495.22\cdot10^3$	-5177.14	-1217.14	-722.14	-557.14
Андезит-13	n_1	$-129.63\cdot10^3$	-1519.98	-484.7	-355.29	-321.15
	n_2	$-425.55\cdot10^3$	-4730.56	-1111.76	-659.41	-508.63

Таблица 2

Численные значения комбинированных модулей упругости третьего порядка n_1 и n_2 в рамках второго варианта теории малых начальных деформации при использовании «истинных» скоростей (Они относятся также к случаю теории больших и первого варианта теории малых начальных деформаций при использовании «натуральных» скоростей)

Р. ГПа / Среда		0,001	0,1	0,5	1,0	1,5
Серпентинит-11	n_1	$-373.86\cdot10^3$	-3926.27	-936.83	-563.15	-438.59
	n_2	$-362.82\cdot10^3$	-3776.7	-875.34	-512.67	-391.78
Андезит-12	n_1	$-314.48\cdot10^3$	-3334.33	-820.01	-505.72	-400.96
	n_2	$-922.91\cdot10^3$	-1072.83	-335.71	-243.57	-212.86
Андезит-13	n_1	$-334.29\cdot10^3$	-3512.96	-840.00	-505.88	-394.51
	n_2	$-453.01\cdot10^3$	-4604.69	-981.17	-528.23	-377.25

Таблица 3

Численные значения комбинированных модулей упругости третьего порядка n_1 и n_2 в рамках второго варианта теории малых начальных деформаций при использовании «натуральных» скоростей

Р. ГПа / Среда		0,001	0,1	0,5	1,0	1,5
Серпентинит-11	n_1	$-378.80\cdot10^3$	-3920.03	-890.67	-512.00	-385.78
	n_2	$-362.73\cdot10^3$	-3693.37	-792.01	-429.34	-308.45
Андезит-12	n_1	$-314.43\cdot10^3$	-3285.76	-771.44	-457.15	-352.39
	n_2	$-922.11\cdot10^3$	-992.83	-255.71	-163.57	-132.87
Андезит-13	n_1	$-129.52\cdot10^3$	-1411.75	-376.47	-247.06	-203.92
	n_2	$-452.99\cdot10^3$	-4588.22	-964.70	-511.76	-360.78

ЛИТЕРАТУРА

АЛЕКСАНДРОВ, К.С., ПРОДОЙВОДА, Г.Т., МАСЛОВ, Б.П. 2001. Метод определения нелинейных упругих свойств горных пород. *Докл. РАН*, 380, 1, 109-112.

БАКУЛИН, В.Н., ПРОТОСЕНИЯ, А.Г. 1982. О наличии нелинейных эффектов при распространении упругих волн в горных породах. *Докл. АН СССР*, 263, 2, 314-316.

ГУЗЬ, А. Н. 1986. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Общие вопросы, 1. Закономерности распространения, 2. Науков. думка, Киев, 376, 536.

КУЛИЕВ, Г.Г. 2000. Определение коэффициента Пуассона в напряженных средах. *Докл. РАН*, 370, 4, 534-537.

КУЛИЕВ, Г.Г., ДЖАББАРОВ, М.Д. 1998. О распространении упругих волн в напряженных нелинейных анизотропных средах. *Изв. АН Азербайджана. Науки о Земле*, 2, 103-112.

КУЛИЕВ, Г.Г., ШИРИНОВ, Н.М. 2005. К определению второго порядка модулей упругости напряженных нелинейных изотропных сред. *Изв. НАН Азербайджана. Науки о Земле*, 3, 10-16.

САФАРОВ, И.Б. 2003. Анизотропия упругих свойств горных пород при высоких термодинамических условиях и петрофизические модели Литосферы. Автореф. дисс.на соиск. уч. степ. д.г.-м.н. Баку, 47.

ШИРИНОВ, Н.М. 2005. О линейных физико-механических свойствах нелинейно-деформированных пород. *Труды Института Геологии*, 33, 216-225.

KULIEV, G.G. 1998a. To a dynamic method of poisson's coefficient determination. Extended volume 1 abstracts, 60th EAGE Conference and Technical Exhibition, 8-12 June, Leipzig, Germany, 081.

KULIEV, G.G. 1998b. To physical-mechanical properties of strained slightly anisotropic media. *Proceedings the sciences of Earth of academy of sciences Azerbaijan*, 4, 134-140.

KULIEV, G.G. DJEVANSHIR, R.D. 2000. On real and virtual values of rocs elasticity's modules. *Abstracts 31st Intern. Geological Congress*, 4-17 august, Rio-de-Janeiro, Brazil.

THURSTON, R., BRUGGER, K. 1964. Third-order elastic constants and velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media. *Phys. Rev. A*, 133, 6, 1604-1610.

YIN, H., RASOLOFOSAON, P.N.J. 1994. Nonlinear and linear elastic behavior of anisotropic rocks: Ultrasonic experiments versus theoretical predictions. Abstracts, 64 SEG meeting, Los Angeles, *Expanded Abstracts,* Paper SL 3, 4, 1129-1132.